

2 DOORSTROOMFINALITEIT

Info over de vakfiche

Geldig van 1 januari 2027 tot en met 31 december 2027. Je gebruikt deze vakfiche voor deze studierichtingen in de **2^{de} graad doorstroomfinaliteit**:

- economische wetenschappen
- natuurwetenschappen
- moderne talen
- Latijn

De punten die je voor dit vak behaalt, zijn geldig voor alle studierichtingen uit deze lijst.

Ter info: In deze vakfiche werden geen differentiële doelen opgenomen. Dit zijn leerinhouden die in het regulier onderwijs worden aangeboden aan leerlingen die in de 3^{de} graad het pakket gevorderde wiskunde wensen te volgen. Omdat je bij de Examencommissie vrij kan inschrijven in alle richtingen van de 3^{de} graad doorstroom, ongeacht je vooropleiding, hebben we ervoor gekozen om deze doelen uitsluitend op te nemen in de 3^{de} graad bij de studierichtingen economie-wiskunde, Latijn-wiskunde en wetenschappen-wiskunde. De inhouden van de differentiële doelen vind je op de [website van Onderwijsdoelen.be](https://www.onderwijsdoelen.be).

Hoe gebruik je deze vakfiche?

Een vakfiche bevat informatie die je nodig hebt om te studeren en om je examen met succes af te leggen. We geven je dus niet alleen de leerstof maar ook uitleg over hoe het examen verloopt, wat je moet meebrengen, hoe we je examen beoordelen en welk cursusmateriaal je kan gebruiken om je voor te bereiden.

In het hoofdstuk *Wat moet je leren?* gebruiken we altijd dezelfde symbolen, zodat duidelijk is voor jou wat je moet kennen en kunnen op het examen.



Leerdoel

Bij elk hoofdstuk krijg je eerst een korte beschrijving van het leerdoel: een algemene omschrijving van de competenties die je moet verwerven.



Dit moet je **kennen**:

Dit is een opsomming van begrippen en concepten die je tijdens je voorbereiding moet leren. Je moet deze ondersteunende kennis gebruiken in de opdrachten van het examen en zo bewijzen dat je de competenties echt onder de knie hebt.



Dit moet je **kunnen**

Hier vind je wat meer in detail terug wat je moet kunnen aan de hand van de leerstof die je gestudeerd hebt. Je bereidt je voor op het examen vanuit concrete problemen en situaties.



Extra info

Soms geven we extra info of verwijzen we naar een vorig hoofdstuk.



Bijlage

Bij deze vakfiche horen 1 of meerdere bijlagen. Je vindt ze op het einde van de vakfiche.

Wat moet je leren?

Terwijl je studeert, moet je je voorbereiden op 2 soorten opgaven die je kan krijgen op het examen:

- **met context of in een betekenisvolle situatie** = opgaven die vertrekken vanuit een concrete of specifieke situatie uit de wereld rondom ons.
- **zonder context** = opgaven die abstract en zuiver wiskundig zijn.

Een opgave kan zowel een probleem als een vraagstuk zijn:

- een **vraagstuk** = een opgave die opgelost kan worden met de leerinhouden van het bijhorende hoofdstuk uit de vakfiche.
- een **probleem** = een opgave die niet gekoppeld kan worden aan een specifiek hoofdstuk. Je combineert leerinhouden om te komen tot een oplossing.
- een **meetkundig probleem** = de verzamelnaam voor vraagstukken en problemen waarbij meetkundige vaardigheden nodig zijn om de opgave op te lossen.

Deze rubriek is opgebouwd uit 6 bouwstenen:

1. Probleemoplossend denken
2. Logica en bewijzen
3. Getallenleer
4. Meetkunde en metend rekenen
5. Relaties en verandering
6. Data en onzekerheid (statistiek)

Probleemoplossend denken

Mathematiseren en demathematiseren



Je lost problemen met en zonder context op door te mathematiseren en demathematiseren en door gebruik te maken van heuristieken. Vraagstukken en problemen kunnen zowel met als zonder context aan bod komen.

Om een opgave (procedureel) op te lossen, analyseer je het eerst. Vervolgens zet je het concrete probleem om in wiskundetaal en wiskundige symbolen en uitdrukkingen. Dan los je het (wiskundige) probleem op en denk je na over je oplossingsproces.

- Begrijp het probleem
- Maak een plan
- Voer het plan uit
- Reflecteer

Tot slot formuleer je een antwoord op je opgave.

Wiskundige denkprocessen bestaan vooral uit het creatief combineren van kennis en vaardigheden in nieuwe, onbekende situaties. In dit onderdeel rond probleemoplossende vaardigheden staan wiskundige denkprocessen en het wiskundig modelleren centraal. Zo kun je heel wat realistische problemen oplossen. Daarbij moet je zelf de oplossingsstrategie kiezen aan de hand van je kennis en vaardigheden uit de eerste en tweede graad.

Voorbeelden van oplossingsstrategieën (heuristieken) zijn:

- een schets, tekening of tabel maken, een vertaling van het probleem in een meer geschikte voorstelling.
- gegevens schematisch voorstellen, ordenen
- variabelen invoeren
- schatten, slim gissen (en missen), testen, controleren
- voorbeelden geven, gebruik maken van speciale gevallen,
- alle mogelijkheden opschrijven
- terugrekenen, van achter naar voor werken
- het vraagstuk zelf uitvoeren, simuleren
- patronen en regelmaat ontdekken, gebruik maken van symmetrie in het probleem
- logisch redeneren
- opsplitsen in deelproblemen.

Voorbeelden van vaardigheden zijn:

- taalvaardigheid: wiskundige uitdrukkingen in eenvoudige situaties begrijpen, tekeningen, grafieken en diagrammen begrijpen, vragen beantwoorden
- rekenvaardigheid: rekenen met getallen en handig rekenen
- meet- en tekenvaardigheid: de lengte van lijnstukken en de grootte van hoeken meten met een geodriehoek, met passer en geodriehoek tekenen
- ICT-vaardigheid: rekenapps gebruiken en constructies maken in GeoGebra.



wiskundige concepten uit de vakfiches van de eerste graad en uit tweede graad doorstroomfinaliteit



Je past wiskundige concepten en vaardigheden uit eindtermen van de tweede graad doorstroomfinaliteit toe.

Je past heuristieken toe om vraagstukken en problemen op te lossen.

Je lost vraagstukken en problemen op door te mathematiseren en te demathematiseren.

Je past reflectievaardigheden toe om je proces en je oplossing te evalueren.

ICT-vaardigheid



Je gebruikt ICT om berekeningen uit te voeren en om grafische voorstellingen te maken.



Tijdens het examen mag je een webpagina met rekenapps gebruiken. We raden je aan om thuis te oefenen met de rekenapps. Je vindt ze terug op onze website:

<https://www.vlaanderen.be/examencommissiesecundaironderwijs/voorbereiding#rekenapps>. We staan geen andere ICT-middelen toe tijdens het examen.

Bij vragen met de instructie "Noteer het antwoord op het scherm." staat een icoon met info over het gebruik van ICT.



Los de examenvraag op zonder ICT.

- Je toont duidelijk je werkwijze en redenering;
- Je schrijft alle tussenstappen en berekeningen volledig uit;
- Je werkt exact.(*)

	Gebruik ICT alleen ter ondersteuning van het rekenwerk.	• Je toont duidelijk je werkwijze en redenering; • Je schrijft alle tussenstappen en berekeningen volledig uit; • Je werkt zo lang mogelijk exact.
---	---	--

(*) Exact werken betekent dat je een wiskundige uitdrukking niet mag benaderen of afronden. Dat betekent dat je breuken, wortels, π , ... in je berekeningen laat staan, als ze tenminste niet 'mooi' uitkomen.



website met 3 GeoGebra-apps: grafische rekenmachine, rekenblad, kansrekenen en statistiek

commando's in GeoGebra



Je gebruikt ICT om

- bewerkingen uit te voeren
- goniometrische getallen te berekenen
- vergelijkingen en ongelijkheden grafisch op te lossen
- grafieken te tekenen
- gegevens te groeperen
- een frequentietabel op te stellen
- vectoren te tekenen
- ...

Bij de verschillende doelen wordt vermeld waarvoor je ICT moet kunnen gebruiken.

Logica en bewijzen

Wiskundige redeneringen en uitspraken



Je beargumenteert wiskundige redeneringen en uitspraken en je bewijst wiskundige uitspraken. Je maakt daarbij gebruik van eigenschappen of van een tegenvoorbeeld.

Wiskundig redeneren bevordert het wiskundig inzicht en het probleemoplossend denken. Het gaat dus om meer dan alleen een bewijs opstellen: een formulering van een vermoeden, argumentatie, verklaring, bewijsvoering, veralgemening, structurering, ordening, analoge werking en/of door een synthese te maken. Ook het uitschrijven van een berekening waarbij je aandacht besteedt aan het wiskundig correct noteren met de juiste symbolen is een wiskundige redenering.

Om dit doel te bereiken moet je een aantal wiskundige denkmethoden verwerven en dien je te reflecteren over je denkproces.

Wil je een idee krijgen van de correctheid van een wiskundige uitspraak, dan illustreer je de eigenschap met voorbeelden. Vermoed je dat een eigenschap niet correct is, dan zoek je een tegenvoorbeeld om aan te tonen dat de eigenschap vals is.

Bij het oplossen van opgaven schrijf je de redenering correct uit en gebruik je vaktaal. Je verantwoordt je tussenstappen.

Je vult stappen uit bewijzen aan en je verklaart tussenstappen, bijvoorbeeld door een passende eigenschap te geven of te selecteren uit het formularium.

Je maakt gebruik van de symbolen $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\forall$ en $\exists$. Het is niet nodig de dubbele pijl systematisch te gebruiken bij het oplossen van vergelijkingen.

Wiskundige redeneringen en tot uitspraken komen zijn geen losse opgaven, maar komen geïntegreerd aan bod in verschillende onderdelen van de vakfiche. Dit wordt aangegeven met de zin: Bij dit doel beargumenteer je wiskundige redeneringen en zoals toegelicht bij het onderdeel 'Wiskundige redeneringen en uitspraken'.



Tijdens het examen mag je het formularium (bijlage 1) gebruiken uit de bijlage van deze vakfiche.

De lijst met bewijzen ([bijlage 2](#)) mag je niet gebruiken.



- de symbolen $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$
- implicatie en equivalentie
- nodige en voldoende voorwaarde
- kwantoren $\forall$, $\exists$



Je illustreert een uitspraak met voorbeelden.

Je controleert de correctheid van een wiskundige uitspraak.

Je noteert je redenering bij een open vraag op een wiskundig correcte manier:

- Je hanteert vaktaal.
- Je plaatst bewerkingstekens en haakjes waar nodig.
- Je herkent en benoemt in een berekening of een redenering de toegepaste eigenschap.
- Je verklaart tussenstappen in een redenering.

Je vult redeneerstappen aan in de bewijzen uit de lijst met bewijzen.

Je weerlegt een foutieve uitspraak met een tegenvoorbeeld bijvoorbeeld rekenregels die fout worden toegepast, uitspraken over schaalverandering ...

Je beargumenteert de redeneerstappen in een aangereikte wiskundige redenering.
 Bijvoorbeeld een bewijs uit de lijst dat we aanreiken in een gewijzigde situatie: andere letters, andere tekening, gewijzigde gegevens ...

Bewijzen uit de lijst:

- irrationaliteit van $\sqrt{2}$
- Pythagoras
- tweedegraadsfuncties
 - coördinaten van de top
 - oplossingen van een tweedegraadsvergelijking
 - ontbinden in factoren
- grondformule
- sinusregel en cosinusregel

Waarheidswaarde van logische uitspraken

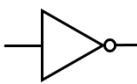
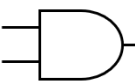
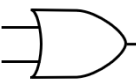
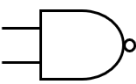
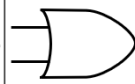
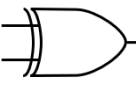
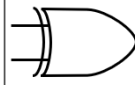


Je bepaalt de waarheidswaarde van logische uitspraken. Je doet dit in opgaven met en zonder context.



- de symbolen $\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- logische uitspraak
- waarheidswaarde
- tautologie, contradictie
- de negatie, de conjunctie, de disjunctie, de implicatie, en de equivalentie in de logica en het verschil met 'of' en 'als ... dan ...' in de omgangstaal.

- logische poorten en bijbehorende symbolen:

NOT	AND	OR	NAND	NOR
				
		XOR		XNOR
				



Je stelt een waarheidstabel op van een logische uitspraak.

Je vertaalt een uitspraak in woorden naar een uitspraak in symbolen of een uitspraak in symbolen naar een uitspraak in woorden.

Je stelt de werking en betekenis van de logische poorten voor met een waarheidstabel.

Je stelt een waarheidstabel op voor logische schakelingen en interpreteert de werking van de schakeling.

Getallenleer

Reële getallen



Je rekent met reële getallen. Je doet dit in opgaven met en zonder context.



- de invoering van de reële getallen als de vervollediging van de reële getallen
- natuurlijke, gehele, rationale en irrationale getallen
- voorstellingswijzen van een reëel getal: begrensde decimale vorm, onbegrensde repeterende vorm of onbegrensde niet-repeterende decimale vorm
- zinvolle verbanden tussen decimale vorm, wortelvorm, breuk en procent
- derdemachtsworteltrekking
- wetenschappelijke notatie
- eigenschappen in woorden en symbolen, teken- en rekenregels van bewerkingen met reële getallen
- associativiteit, commutativiteit, distributiviteit



Je legt uit dat reële getallen nodig zijn om de getallenas te vervolledigen. Het berekenen van vierkantswortel 2, de omtrek van een cirkel met straal 1 en het bepalen van de lengte van de schuine zijde van een rechthoekige driehoek waarvan de rechthoekszijden lengte 1 hebben zijn voorbeelden van opgaven die niet in de verzameling van de rationale getallen berekend kunnen worden.

In een concrete situatie herken je:

- een zuiver irrationaal getal zoals de lengte van een schuine zijde in een rechthoekige driehoek
- een berekening die alleen mogelijk is in de verzameling van de reële getallen zoals de berekening van een vierkantswortel
- ...

Je zet met ICT een reëel getal om van de ene vorm naar de andere.

Je past een methode toe om getallen te benaderen, af te ronden en te schatten.

Je gebruikt notaties met machten van 10: wetenschappelijke notatie.

Eenvoudige berekeningen met reële getallen voer je uit zonder ICT, andere met ICT:

- Je voert bewerkingen uit op reële getallen en past de volgorde van bewerkingen juist toe.
- Je past de teken- en rekenregels van bewerkingen juist toe.
- Je gebruikt de eigenschappen van commutativiteit, associativiteit en distributiviteit bij berekeningen met reële getallen.
- Je berekent en vereenvoudigt vierkantswortels.
- Je berekent derdemachtswortels.
- Je maakt de noemer van een breuk wortelvrij voor breuken waarvan de noemer een éénterm is.
- Je rekt met vierkantswortels in lettervormen.
- Je rekt met machten met gehele exponenten.
- Je rekt met machten in lettervormen.

Je lost vraagstukken en problemen op waarin je reële getallen gebruikt.



Bij dit doel beargumenteer je wiskundige redeneringen zoals toegelicht bij het onderdeel 'Wiskundige redeneringen en uitspraken'.



Je ordent reële getallen. Je doet dit in opgaven met en zonder context.



- symbolen: $<, >, \leq, \geq, =$
- getallenas
- afrondingsregels:
- Om af te ronden op een bepaalde rang, kijk je naar het cijfer van de volgende rang.
 - is dat cijfer 0, 1, 2, 3, 4 dan rond je af naar beneden,
 - is dat cijfer 5, 6, 7, 8, 9 dan rond je af naar boven.
- interval
 - open intervallen, voorbeeld: $]3, \pi[,]-\infty, 4[,]-\infty, +\infty[$
 - halfopen of halfgesloten intervallen, voorbeeld $[0, +\infty[,]-4, -3]$
 - gesloten intervallen, voorbeeld $[0, 1]$



Je vergelijkt en ordent getallen.

Je zet een reëel getal om van de ene vorm naar de andere. Eenvoudige gevallen los je op zonder ICT, andere met ICT.

Je stelt reële getallen voor op een getallenas.

Je gebruikt de intervalnotatie voor een verzameling van reële getallen.

Meetkunde en metend rekenen

Rechten en vlakken



Je bepaalt de onderlinge ligging van rechten en vlakken in ruimtelijke situaties.
Je doet dit in opgaven met en zonder context.



- punt, rechte, vlak
- onderlinge ligging van rechten en vlakken:
 - evenwijdig
 - samenvallend
 - snijdend
 - kruisend
 - loodrecht
- onderscheid tussen ruimtefiguren en vlakke figuren
- principe van tweedimensionale voorstelling van een driedimensionale figuur:
 - natuurlijk perspectief
 - cavalièreperspectief
 - projecties op drie vlakken (zijaanzicht, vooraanzicht, bovenaanzicht)

o ontwikkelingen

- $\in, \notin, \subset, \not\subset, \cap, \cup, \setminus$
- element, deelverzameling, doorsnede, unie, verschil



Je onderscheidt ruimtefiguren en vlakke figuren.

Je bespreekt bij een tweedimensionale voorstelling van een driedimensionale situatie grafisch de onderlinge ligging van

- 2 rechten: evenwijdig, samenvallend, snijdend, kruisend, loodrecht;
- 2 vlakken: evenwijdig, samenvallend, snijdend, loodrecht;
- een rechte en een vlak: evenwijdig, rechte in het vlak, snijdend, loodrecht

In je bespreking kies je de passende definities en eigenschappen uit het formularium.



Bij dit doel beargumenteer je wiskundige redeneringen zoals toegelicht bij het onderdeel 'Wiskundige redeneringen en uitspraken'.

Gelijkvormige figuren



Je bepaalt het effect van schaalverandering op vorm, lengte, oppervlakte en inhoud of volume van vlakke figuren en ruimtelijke figuren. Je doet dit in opgaven met en zonder context.



- gelijkvormigheid, gelijkvormigheidsfactor
- schaal als verhouding
- effect van schaalverandering op lengte, oppervlakte en inhoud of volume



Je berekent de gelijkvormigheidsfactor.

Je berekent de lengte, de oppervlakte en de inhoud of het volume bij een gegeven gelijkvormigheidsfactor of bij een gegeven schaal.

Je gaat het effect van schaalverandering na door een lengte, oppervlakte of inhoud/volume te berekenen.

Je beoordeelt uitspraken over het effect van schaalverandering op lengte, oppervlakte en inhoud/volume.



Bij dit doel beargumenteer je wiskundige redeneringen zoals toegelicht bij het onderdeel 'Wiskundige redeneringen en uitspraken'.

Vlakke en ruimtelijke problemen



Je past gelijkvormigheidskenmerken van driehoeken toe om meetkundige problemen op te lossen. Je doet dit in opgaven met en zonder context.



- de gelijkvormigheidskenmerken van driehoeken:

- $HH, \frac{Z}{Z}H, \frac{Z}{Z}\frac{Z}{Z}, \frac{Z}{Z}\frac{Z}{Z}\frac{Z}{Z}, \frac{Z}{Z}\frac{Z}{Z}90^\circ$



Je gebruikt de gelijkvormigheidskenmerken om een meetkundig probleem op te lossen:

- Je motiveert waarom twee driehoeken gelijkvormig zijn door een juist kenmerk te selecteren en toe te passen op de gegeven situatie. Je weet met andere woorden waarom twee hoeken gelijk zijn, waarom twee verhoudingen van zijdes gelijk zijn ...
- Je gebruikt de gelijkvormigheid om het probleem daadwerkelijk op te lossen: de lengte van een zijde berekenen, de grootte van een hoek berekenen ...



Bij dit doel beargumenteer je wiskundige redeneringen zoals toegelicht bij het onderdeel 'Wiskundige redeneringen en uitspraken'.



Je past de stelling van Pythagoras toe om meetkundige problemen op te lossen in het vlak en in de ruimte. Je doet dit in opgaven met en zonder context.



- stelling van Pythagoras
- De analytische uitdrukking voor de afstand tussen 2 punten in het vlak:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ met } A(x_1, y_1) \text{ en } B(x_2, y_2)$$



Je gebruikt de stelling van Pythagoras om een meetkundig probleem op te lossen:

- Je verklaart waarom een driehoek rechthoekig is.
- Je berekent de lengte van de zijden in een rechthoekige driehoek.
- Je berekent de afstand tussen 2 punten in het vlak.

Soms zal je meerdere keren Pythagoras moeten toepassen of andere leerinhouden uit de vakfiche moeten gebruiken om het probleem volledig op te lossen: de lengte van een zijde, het bewijs van een gegeven eigenschap, een geschikt vlak in een ruimtelijke situatie om het meetkundig probleem op te lossen ... Voorbeeldsituaties zijn een ladder die tegen een muur wordt gezet, een IKEA-kast die in een ruimte moet passen, de lengte van een ruimtediagonaal in een balk ...



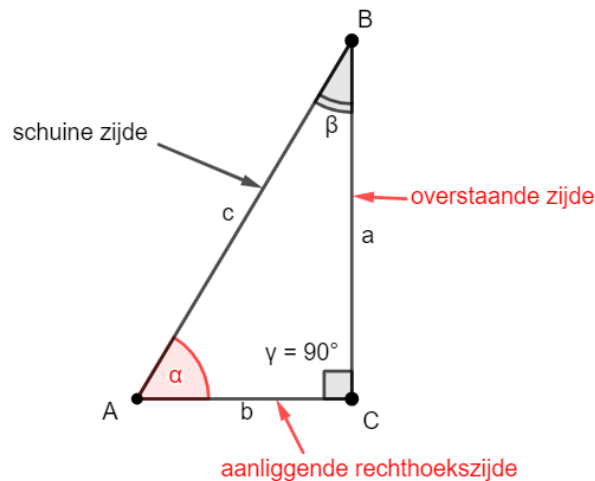
Bij dit doel beargumenteer je wiskundige redeneringen zoals toegelicht bij het onderdeel 'Wiskundige redeneringen en uitspraken'.



Je gebruikt de goniometrische getallen sinus, cosinus en tangens in rechthoekige driehoeken om een meetkundig probleem op te lossen. Je doet dit in opgaven met en zonder context.



- de goniometrische getallen sinus, cosinus en tangens van een scherpe hoek als de verhoudingen van de zijden van een rechthoekige driehoek



$$\sin(\alpha) = \sin(\hat{A}) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}} = \frac{a}{c} = \frac{|BC|}{|AB|}$$

$$\cos(\alpha) = \cos(\hat{A}) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}} = \frac{b}{c} = \frac{|AC|}{|AB|}$$

$$\tan(\alpha) = \tan(\hat{A}) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}} = \frac{a}{b} = \frac{|BC|}{|AC|}$$

- de grondformule van de goniometrie: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$



Je berekent met ICT de goniometrische getallen van een scherpe hoek als verhoudingen van de lengten van zijden van een rechthoekige driehoek.

Je gebruikt goniometrische getallen om meetkundige problemen op te lossen:

- Je berekent de lengte van de zijden in een rechthoekige driehoek.
- Je berekent de grootte van hoeken in een rechthoekige driehoek.
- Je lost de rechthoekige driehoek op.

Voorbeeldsituaties zijn de hoogte van een boom berekenen uit de kijkhoek en de afstand tot de boom, hoogteverschil berekenen uit de hellingshoek en de lengte van een steil bergpad ...

Je gebruikt de grondformule om meetkundige problemen zonder context op te lossen.

- Je vereenvoudigt formules en vormt ze om naar het gevraagde.
- Je berekent bij een gegeven goniometrisch getal de andere goniometrische getallen.



Bij dit doel beargumenteer je wiskundige redeneringen zoals toegelicht bij het onderdeel 'Wiskundige redeneringen en uitspraken'.



Je gebruikt goniometrische formules om uitdrukkingen te vereenvoudigen. Je doet dit in opgaven met en zonder context.



- goniometrische cirkel
- georiënteerde hoeken
- verwante hoeken: gelijke hoeken, tegengestelde hoeken, complementaire hoeken, supplementaire hoeken, anticomplementaire hoeken, antisupplementaire hoeken
- formules: verbanden tussen goniometrische getallen van verwante hoeken, de grondformule, stelling van Pythagoras, sinusregel, cosinusregel ...



Je stelt hoeken voor op de goniometrische cirkel.

Je leidt verbanden tussen goniometrische getallen van verwante hoeken af van de goniometrische cirkel.

Je gebruikt de goniometrische formules en de voorstelling op de goniometrische cirkel van verwante hoeken om uitdrukkingen zonder context te vereenvoudigen.



Bij dit doel beargumenteer je wiskundige redeneringen zoals toegelicht bij het onderdeel 'Wiskundige redeneringen en uitspraken'.



Je gebruikt de sinus- en cosinusregel om meetkundige problemen op te lossen. Je doet dit in opgaven met en zonder context.



- som van de hoeken in een driehoek
- sinusregel en cosinusregel in een willekeurige driehoek



Je lost willekeurige driehoeken op, bijvoorbeeld vanuit de lengte van 2 zijden en de grootte van de ingesloten hoek bereken je de lengte van de 3^e zijde en de ontbrekende hoeken.

Je gebruikt de sinus- en de cosinusregel om meetkundige problemen in willekeurige driehoeken op te lossen. Je houdt rekening met de gegevens uit de opgave en stemt de verkregen tussenresultaten af op de gegevens, bijvoorbeeld bij gebruik van de sinusregel in een stomphoekige driehoek.



Bij dit doel beargumenteer je wiskundige redeneringen zoals toegelicht bij het onderdeel 'Wiskundige redeneringen en uitspraken'.

Vectoren



Je tekent in het vlak de som en het verschil van vectoren en de vermenigvuldiging van een vector met een reëel getal. Je doet dit in opgaven met en zonder context.



- vector, nulvector, tegengestelde vector, gelijke vectoren
- richting, zin, grootte
- som en verschil van vectoren
- vermenigvuldiging van een vector met een reëel getal
- verband met verschuivingen



Je tekent de som en het verschil van vectoren.

Je tekent de vermenigvuldiging van een vector met een reëel getal.

Je gebruikt die bewerkingen in de volgende contexten: krachten, verplaatsing en snelheid.



Je rekent met vectoren in het vlak. Je doet dit in opgaven met en zonder context.



- vrije vector, puntvector, coördinaten, orthonormaal assenstelsel, norm of grootte van een vector, eenheidsvector, gelijke vectoren
- de formule van Chasles-Möbius $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$
- ontbinding van een vector in zijn componenten
- bewerkingen met vectoren: optelling, vermenigvuldiging met een reëel getal
- grafische betekenis van bewerkingen met vectoren



Je lost meetkundige problemen op.

Om tot een juiste oplossing te komen hanteer je 1 of meer van de volgende vaardigheden:

- Je rekent met vectoren en met coördinaten van vectoren.
- Je voert bewerkingen uit met vectoren en met coördinaten van vectoren: optelling, aftrekking en vermenigvuldiging met een reëel getal.
- Je zet vectoren om naar puntvectoren met de formule van Chasles-Möbius.
- Je leest de norm van een vector grafisch af.
- Je berekent de norm van een vector.
- Je ontbindt een vector in zijn componenten in een assenstelsel: grafisch en via berekening.

Voorbeelden van contexten die hierbij aan bod komen zijn resulterende kracht en verplaatsing.

Relaties en verandering

Formules



Je drukt bij een formule 1 variabele uit in functie van een andere. Je doet dit in opgaven met en zonder context.



- eigenschappen van gelijkheden
- eigenschappen, teken- en rekenregels van bewerkingen
- lineair, zuiver kwadratisch



Je vormt een gegeven formule om door gebruik te maken van eigenschappen van gelijkheden en eigenschappen, teken- en rekenregels van bewerkingen.

Voorbeelden van formules uit de vakfiche

- vergelijking van eerstegraadsfuncties: $y = ax + b$ (lineair)
- vergelijking van tweedegraadsfuncties: $y = ax^2$ (zuiver kwadratisch, zoals oppervlakte)

formules uit de natuurwetenschappen

- massadichtheid: $\rho = \frac{m}{V}$
- ERB: $x = x_0 + v_0(t - t_0)$
- kracht: $F = m \cdot g$
- druk: $p = \frac{F}{A}$, $p = \rho \cdot g \cdot h$, $p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$
- energie:

$E_{\text{pot,gr}} = m \cdot g \cdot h$
 $E_{\text{pot,el}} = \frac{k \cdot \Delta l^2}{2}$
 $E_{\text{kin}} = \frac{m \cdot v^2}{2}$

$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$
 $\eta = \frac{E_{\text{nuttig}}}{E_{\text{totaal}}}$
- Ohm: $U = R \cdot I$
- veerkracht: $F = c \cdot u$
- molaire concentratie: $c = \frac{n}{V}$

Vergelijkingen en ongelijkheden



Je lost eerstegraadsvergelijkingen en -ongelijkheden in 1 onbekende algebraïsch en grafisch op in de verzameling van de reële getallen. Je doet dit in opgaven met en zonder context.



- eerstegraadsvergelijking in 1 onbekende
- eerstegraadsongelijkheid in 1 onbekende
- oplossingenverzameling, interval
- getallenas en grafiek
- het verband tussen:

- oplossing van een vergelijking van de vorm $f(x) = 0$ en de nulwaarde van de functie f
- oplossing van een ongelijkheid van de vorm $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \leq 0$, $f(x) \geq 0$ en het tekenverloop van de functie f



Je lost eerstegraadsvergelijkingen in 1 onbekende algebraïsch op en noteert de oplossingenverzameling.

Je lost eerstegraadsongelijkheden in 1 onbekende algebraïsch op en noteert de oplossingenverzameling met een interval.

Je vertaalt een vraagstuk naar een eerstegraadsvergelijking of naar een passende ongelijkheid en lost het op.

Je lost vergelijkingen en ongelijkheden grafisch op, met en zonder ICT.

Je geeft de oplossingenverzameling van een ongelijkheid als een interval en stelt de oplossingenverzameling voor op een getallenas.

Je legt het verband tussen de oplossingenverzameling van een vergelijking of een ongelijkheid en een geschikt tekenverloop. Je legt in een opgave het verband tussen:

- de oplossing(en) van een vergelijking van de vorm $f(x) = 0$ en de nulwaarde van de functie f
- de oplossingen van een ongelijkheid van de vorm $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \leq 0$, $f(x) \geq 0$ en het tekenverloop van de functie f



Je lost een stelsel van 2 eerstegraadsvergelijkingen in 2 onbekenden algebraïsch en grafisch op. Je doet dit in opgaven met en zonder context.



- stelsel
- algemene vorm van een eerstegraadsvergelijking met twee onbekenden: $ux + vy + w = 0$ met $u, v, w \in \mathbb{R}$ en $(u, v) \neq (0, 0)$
- oplossingenverzameling met koppelvoorstelling:
 $V = \{(x_1, y_1)\}$, $V = \{(x, y) \mid y = ax + b\}$, $V = \emptyset$
- de lege verzameling, oplossingenverzameling van een strijdig stelsel:
 $V = \emptyset$, $V = \{ \}$
- algebraïsch oplossen van stelsels: combinatiemethode, substitutiemethode, gelijkstellingsmethode
- getallenas en grafiek
- interval

- het verband tussen:
 - de oplossing(en) van een vergelijking van de vorm $f(x) = g(x)$ en de gemeenschappelijke punten van de grafieken van de functies f en g
 - de oplossing(en) van een stelsel en de gemeenschappelijke punten van de overeenkomstige grafieken



Je lost stelsels algebraïsch.

Je lost stelsels grafisch op, met en zonder ICT.

Je vertaalt een vraagstuk naar een stelsel van 2 vergelijkingen en lost het vraagstuk op.

Je legt in een opgave het verband tussen een stelsel van twee eerstegraadsvergelijkingen

- met 1 oplossing – een bepaald stelsel – en de grafiek van 2 snijdende rechten
- zonder oplossingen – een strijdig stelsel – en de grafiek van 2 evenwijdige, niet samenvallende rechten
- met oneindig veel oplossingen – een onbepaald stelsel – en 2 samenvallende rechten.

Je legt in een opgave het verband tussen:

- de oplossing(en) van een vergelijking van de vorm $f(x) = g(x)$ en de gemeenschappelijke punten van de grafieken van de functies f en g
- de oplossing(en) van een stelsel en de gemeenschappelijke punten van de overeenkomstige grafieken.



Je lost tweedegraadsvergelijkingen in 1 onbekende algebraïsch op. Je doet dit in opgaven met en zonder context.



- tweedegraadsvergelijking of vierkantsvergelijking
- standaardvorm van een tweedegraadsvergelijking: $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \in \mathbb{R}_0$ en $b, c \in \mathbb{R}$
- volledige en onvolledige vierkantsvergelijking
- discriminant en oplossingen van een tweedegraadsvergelijking, inclusief formules
- oplossingenverzameling
- ontbinden in factoren
- merkwaardige producten: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ en $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$



Je lost tweedegraadsvergelijkingen in 1 onbekende algebraïsch op door

- een gemeenschappelijke factor af te zonderen,
- de formule voor het verschil van 2 kwadraten toe te passen,
- een drieterm op te sporen die een volkomen kwadraat is,
- de formules met discriminant toe te passen.

Je noteert de oplossingenverzameling.

Je vertaalt een vraagstuk naar een tweedegraadsvergelijking en lost op.

Je legt het verband tussen de oplossing(en) van de vergelijking en de nulwaarden van de parabool. Je controleert je verkregen oplossingen met ICT.



Bij dit doel beargumenteer je wiskundige redeneringen zoals toegelicht bij het onderdeel 'Wiskundige redeneringen en uitspraken'.



Je lost ongelijkheden van de tweede graad met 1 onbekende algebraïsch op. Je doet dit in opgaven met en zonder context.



- tweedegraadsongelijkheid
- interval en oplossingenverzameling
- algebraïsche rekentechnieken om ongelijkheden van de tweede graad op te lossen



Je stelt een ongelijkheid van de tweede graad met 1 onbekende op.

Je lost ongelijkheden van de tweede graad algebraïsch op.

Je legt in een opgave het verband tussen de oplossingen van een ongelijkheid van de vorm $f(x) < g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, $f(x) \geq g(x)$ en de onderlinge ligging van de grafieken van de functies f en g . Je controleert je verkregen oplossingen met ICT.

Functies



Je herkent functies en legt het verband tussen de verschillende voorstellingswijzen van een functie: verwoording, tabel, grafiek en voorschrift. Je doet dit in opgaven met en zonder context.



- functie, functiewaarde
- afhankelijke en onafhankelijke variabele
- x-waarde, y-waarde, element van het domein, element van het bereik
- voorstellingswijzen van een functie en de onderlinge samenhang ervan: verwoording, tabel, grafiek, voorschrift



Je bepaalt bij een gegeven voorstellingswijze of het verband een functie is of niet.

Je toont in een verwoording, tabel, grafiek en voorschrift welke de afhankelijke en welke de onafhankelijke veranderlijke is.

Je combineert een gegeven voorstellingswijze van een functie met een passende andere gegeven voorstelling bijvoorbeeld van de verwoording naar de tabel, de grafiek of het voorschrift, van de tabel naar de verwoording ...



Je bepaalt het voorschrift, de grafiek, de tabel en de verwoording van een eerstegraadsfunctie als 1 van de andere voorstellingswijzen gegeven is. Je doet dit in opgaven met en zonder context.



- eerstegraadsfunctie met voorschrift $f(x) = ax + b$ met $a \in \mathbb{R}_0$ en $b \in \mathbb{R}$
- voorstellingswijzen van een eerstegraadsfunctie en het verband ertussen: verwoording, tabel, grafiek, voorschrift
- verbanden tussen grootheden: lineair verband, recht evenredig verband
- lineaire groei
- richtingscoëfficiënt, snijpunt van de rechte met de y-as: meetkundige betekenis en link met het voorschrift
- vergelijking van een rechte met gegeven richtingscoëfficiënt en door een gegeven punt
- richtingscoëfficiënt van een rechte door 2 gegeven punten



Je herkent en benoemt deze verbanden tussen grootheden: lineair verband, een recht evenredig verband.

Je herkent en benoemt deze soorten toename of afname: lineaire groei, niet-lineaire groei.

Je stelt vanuit een gegeven voorstellingswijze van de functie een andere voorstellingswijze op: van verwoording naar tabel, van tabel naar grafiek ...

Je past deze vaardigheid toe om vraagstukken op te lossen: je vertaalt de gegevens in woorden naar een voorschrift, je vertaalt een gegeven tabel naar een grafiek ...

Je stelt bij meetkundige problemen de vergelijking op van een rechte aan de hand van

- een gegeven richtingscoëfficiënt en 1 gegeven punt;
- 2 gegeven punten.

Je tekent de grafiek van een eerstegraadsfunctie (een rechte)

- met een gegeven richtingscoëfficiënt en door een gegeven punt;
- door 2 gegeven punten.

Je gebruikt in gepaste situaties de eerstegraadsfunctie als model om een vraagstuk op te lossen, bijvoorbeeld:

- de rechte lijnige beweging met constante snelheid
- vaste en variabele kosten of vast en variabel loon
- hydrostatische druk
- energiegebruik
- afschrijving



Je bepaalt het voorschrift of de grafiek van een tweedegraadsfunctie als de andere voorstellingswijze gegeven is. Je doet dit in opgaven met en zonder context.



- tweedegraadsfunctie
- voorschrift van een tweedegraadsfunctie:
 - $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a \in \mathbb{R}_0$ en $b, c \in \mathbb{R}$
 - $f(x) = a(x - p)^2 + q$ met $a \in \mathbb{R}_0$ en $p, q \in \mathbb{R}$
 - $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ met $a \in \mathbb{R}_0$
- betekenis van de coëfficiënten a , c , p en q in de voorschriften
- grafiek van een tweedegraadsfunctie: parabool, bergparabool, dalparabool
- nulwaarden, nulpunten
- top met coördinaten
- vergelijking symmetrieas
- tekenschema
- verloopschema = schema stijgen en dalen
- verbanden tussen grootheden: kwadratisch verband
- transformaties:
 - $f(x) + k$ als een verticale verschuiving
 - $f(x - k)$ als een horizontale verschuiving
 - $k \cdot f(x)$ als een spiegeling of een verscaling

- het effect van deze transformaties op de nulwaarden, de ligging van de nulpunten, de coördinaten en ligging van de top, de vergelijking van de symmetrieas en haar ligging



Je bepaalt de nulwaarden van een tweedegraadsfunctie uit het voorschrift.

Je bepaalt de coördinaten van de top van de parabool uit het voorschrift.

Je bepaalt de vergelijking van de symmetrieas van de parabool uit het voorschrift of de grafiek.

Je stelt het voorschrift op aan de hand van de grafiek waarop de coördinaten van de top duidelijk afleesbaar zijn.

Je schetst de grafiek aan de hand van het voorschrift.

Je bouwt de grafiek van $g(x) = a(x - p)^2 + q$ met $a \in \mathbb{R}_0$ en $p, q \in \mathbb{R}$

stapsgewijs op vanuit de grafiek van $f(x) = x^2$ en benoemt en interpreteert bij elke stap de gebruikte transformaties.

Je verklaart het effect van de transformaties op de nulwaarden, de ligging van de top en de ligging van de symmetrieas. Je gebruikt het effect van de transformaties om een vraagstuk op te lossen.

Je gebruikt in gepaste situaties een tweedegraadsfunctie als model om een vraagstuk op te lossen.



Je analyseert de kenmerken van eerste- en tweedegraadsfuncties. Je doet dit in opgaven met en zonder context.



- voorstellingswijzen van een functie en de onderlinge samenhang ervan: verwoording, tabel, grafiek en voorschrift
- functiekenmerken: domein, bereik, nulwaarden, tekenverloop, verloopschema, extremum, constante/toenemende/afnemende stijging/daling, symmetrie t.o.v. een verticale rechte
- verbanden tussen grootheden: recht evenredig, lineair, omgekeerd evenredig, kwadratisch
- voorschriften van de vorm
 - $f(x) = ax + b$
 - $f(x) = ax^2$
 - $f(x) = ax^2 + bx + c$
 - $f(x) = a(x - p)^2 + q$
 - $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$



Je schetst de grafiek van een functie zonder ICT.

Je tekent de grafiek van een functie met ICT.

Je bepaalt domein, bereik, nulwaarden, tekenverloop, verloopschema, extrema, constante/toenemende/afnemende stijging/daling, symmetrie t.o.v. de oorsprong, symmetrie t.o.v. een verticale rechte aan de hand van een grafiek, met functioneel gebruik van ICT.

Je stelt een tabel met het tekenverloop op aan de hand van de grafiek en gebruikt daarbij de symbolen 0, + en –.

Je stelt een verloopschema op aan de hand van de grafiek en gebruikt daarbij de symbolen ↗, ↘, min, max.



Je onderzoekt de kenmerken van $f(x) = \frac{c}{x}$ met $c \in \mathbb{R}_0$ en de bijhorende grafiek. Je doet dit in opgaven met en zonder context.



- voorstellingswijzen van een functie en de onderlinge samenhang ervan: verwoording, tabel, grafiek en voorschrift
- functiekenmerken: domein, bereik, nulwaarden, tekenverloop, verloopschema, extrema, constante/toenemende/afnemende stijging/daling, symmetrie t.o.v. de oorsprong, symmetrie t.o.v. een verticale rechte
- verbanden tussen grootheden: recht evenredig, lineair, omgekeerd evenredig, kwadratisch



Je schetst de grafiek van een functie zonder ICT.

Je tekent de grafiek van een functie met ICT.

Je bepaalt het domein, het bereik, de nulwaarden, het tekenverloop, het verloopschema, de extrema, de constante/toenemende/afnemende stijging/daling, de symmetrie t.o.v. de oorsprong, de symmetrie t.o.v. een verticale rechte aan de hand van een grafiek met functioneel gebruik van ICT.

Je stelt een tabel met het tekenverloop op aan de hand van de grafiek en gebruikt daarbij de symbolen 0, +, – en |.

Je stelt een verloopschema op aan de hand van de grafiek en gebruikt daarbij de symbolen ↗, ↘, min, max,

Telproblemen



Je lost telproblemen op met behulp van boomdiagrammen en venndiagrammen. Je doet dit in opgaven met en zonder context.



- symbolen $\cap, \cup, \setminus, \in, \notin, \subset, \phi$
- boomdiagram, venndiagram
- somregel, productregel, complementregel als redenering in de schematische voorstellingen (niet als abstracte formule)
- disjuncte verzamelingen



Je stelt een boomdiagram en een venndiagram op.

Je lost telproblemen op met:

- een boomdiagram
- een venndiagram

Je berekent aantallen met de somregel, de productregel en de complementregel.

Data en onzekerheid (statistiek)

Statistisch onderzoek



Je analyseert statistische gegevens aan de hand van voorstellingswijzen en centrum- en spreidingsmaten.



statistische gegevens

- numerieke, categorische (geordende en niet-geordende) gegevens
- niet-gegroepeerde en gegroepeerde gegevens
- frequentietabel, absolute en relatieve frequentie
- klasse, klassenmidden

voorstellingswijzen

- staafdiagram, cirkeldiagram, lijndiagram, histogram, boxplot, dotplot
- symmetrische/scheve verdeling, uitschieters, clusters

centrummaten en spreidingsmaten

- rekenkundig gemiddelde, mediaan, modus
- kwartielen, interkwartielafstand, variatiebreedte, standaardafwijking

misleidingen

- procent (om een relatieve toename of afname van een percentage uit te drukken)
- procentpunt (om een absolute toename of afname van een percentage uit te drukken)
- vaak voorkomende fouten, misconcepties, tekortkomingen en manipulaties bij het grafisch voorstellen, het numeriek samenvatten en het interpreteren van statistische informatie.



Je analyseert en interpreteert frequentietabellen, grafische voorstellingen, centrummaten en spreidingsmaten in functie van de probleemstelling of de onderzoeksvraag. Dit kan aan bod komen in je analyse:

- Je groepeerde gegevens met ICT.
- Je stelt met ICT een frequentietabel op met absolute en relatieve frequenties.
- Je maakt met ICT grafische voorstellingen: een staafdiagram, een cirkeldiagram, een lijndiagram, een histogram, een boxplot en een dotplot.
- Je beoordeelt of de grafische voorstelling in een gegeven situatie zinvol is. Je kiest in een onderzoek de meest geschikte voorstelling.
- Je berekent met ICT het rekenkundig gemiddelde, de mediaan en de modus.
- Je berekent met ICT de variatiebreedte, de kwartielen, de interkwartielafstand en de standaardafwijking.
- Je trekt conclusies op basis van de berekende maten en de grafische voorstellingen.
- Je interpreteert het rekenkundig gemiddelde en de mediaan en legt het verband met de vorm van de verdeling, eventuele uitschieters en eventuele clusters.
- Je interpreteert de kwartielen en de interkwartielafstand en legt het verband met de vorm van de verdeling, eventuele uitschieters en eventuele clusters.

Je spoort vaak voorkomende fouten, misconcepties, tekortkomingen en manipulaties bij het grafisch voorstellen, het numeriek samenvatten en het interpreteren van statistische informatie op en je geeft een juiste interpretatie.

Enkele voorbeelden hiervan zijn:

- assen ongepast schalen: een te grote of te kleine schaal ...
- assen foutief ijkten: een ijk waarbij je stukken overslaat, een ijk die niet start bij nul ...
- de onderdelen van de grafische voorstelling niet correct benoemen (zoals titels, labels, x-as en y-as, staafjes ...)
- de onderdelen van de grafische voorstelling niet correct weergeven (zoals titels, labels, x-as en y-as, staafjes ...) door uitvergroting, door 3D vervorming ...
- informatie of data weglaten;

- percentages foutief interpreteren;
- het gebruik van de mediaan versus het rekenkundig gemiddelde;
- het onderscheid tussen een absolute toename of afname van een percentage (uitgedrukt in procentpunt) en een relatieve toename of afname van dat percentage (uitgedrukt in procent).



Je onderzoekt het verband tussen 2 numerieke grootheden in een dataset met behulp van een spreidingsdiagram met context.



- spreidingsdiagram of puntenwolk
- voorschrift en grafiek van
 - eerstegraadsfuncties van de vorm $f(x) = ax + b$ met $a \in \mathbb{R}_0, b \in \mathbb{R}$
 - kwadratische functies van de vorm $f(x) = ax^2$ met $a \in \mathbb{R}_0$
 - functies van de vorm $f(x) = \frac{c}{x}$ met $c \in \mathbb{R}_0$
- verbanden tussen grootheden: recht evenredig, omgekeerd evenredig, lineair, kwadratisch
- informeel begrip van trendlijn
- informeel begrip van de correlatiecoëfficiënt bij een lineair verband
- vaak voorkomende fouten, misconcepties, tekortkomingen en manipulaties bij het grafisch voorstellen, het numeriek samenvatten van statistische informatie
- vaak voorkomende fouten, misconcepties, tekortkomingen en manipulaties bij het interpreteren van statistische informatie: een sterke correlatie houdt niet noodzakelijk in dat er een oorzaak en gevolg relatie tussen twee variabelen bestaat.



Je stelt met ICT een spreidingsdiagram op en je interpreteert het diagram.

Je bepaalt met ICT de trendlijn met het bijbehorende voorschrift en interpreteert het resultaat.

Je beschrijft het verband tussen de vorm van de puntenwolk en de waarde van de correlatiecoëfficiënt. Je maakt daarvoor gebruik van de vuistregels in het formulairum.

Je bepaalt met ICT de correlatiecoëfficiënt bij een lineair verband en kunt daarmee de sterkte en richting van het verband aangeven.

Je maakt onderscheid tussen correlatie enerzijds en oorzaak, gevolg anderzijds.

Je onderzoekt verbanden tussen grootheden zoals

- massa en volume of inhoud
- de grootte van de zwaartekracht en de massa
- temperatuurverandering, warmtehoeveelheid en massa

Informatie over het examen

Zo ziet het examen eruit

Je legt het examen af in het examencentrum in Brussel. Het examen duurt 150 minuten.

Het digitale examen bestaat uit gesloten en open vragen.

Er zijn verschillende vraagtypes: invulvragen, sleepvragen, dropdownvragen, meerkeuzevragen ... Elk vraagtype heeft een eigen instructiezin, die aangeeft wat je precies moet doen.

In dit examen gebruik je een schrijftablet voor sommige vragen. Je noteert je antwoord dan op het scherm van je schrijftablet met een digitale pen. Op de website vind je info om je voor te bereiden op examens met een schrijftablet: [Examens met een schrijftablet](#).

Je vindt op de website een oefenexamen waarmee je de verschillende vraagtypes kan inoefenen. Uiteraard is dit geen echt examen: de bedoeling is dat je de techniek van de digitale vraagtypes in de vingers krijgt. Alle info om je voor te bereiden vind je op onze website: www.vlaanderen.be/examencommissie-secundair-onderwijs/voorbereiding.

Dit neem je mee

- Je identiteitskaart of een geldig alternatief. In het examenreglement vind je wat geldige alternatieven zijn.

Je laat al je persoonlijke spullen achter in een locker in de onthaalruimte.

Als je een gsm/smartphone of smartwatch, maar ook cursusmateriaal of samenvattingen bij je hebt in de examenruimte beschouwen we dit als examenfraude.

Dit krijg je van ons

Je krijgt van ons het materiaal dat je nodig hebt om je examen te maken:

- een balpen en kladpapier
- hoofdtelefoon

Je mag steeds naar een geodriehoek, passer of meetlat vragen als je die wil gebruiken.

Zo verloopt het examen

Je meldt je aan bij de balie met je identiteitskaart of een geldig alternatief.

In het examenlokaal zelf mag je geen persoonlijke spullen bij je hebben. Na je aanmelding aan het onthaal berg je daarom je jas, je tas of rugzak én je gsm op in een locker.

Je leest de instructies op de examencomputer en tikt de code van de examensticker in om je examen te starten.

Als je klaar bent, sluit je je examen af met de knop beëindigen. Dat kan ten vroegste 15 minuten na de start van het examen. Geef je kladblad af aan de toezichter.

Zo beoordelen we je examen

Er is geen giscorrectie.

onderdeel	gewicht
getallenleer	12,5%
meetkunde	20%
relaties en verandering	30%
data en onzekerheid (statistiek)	20%
logica en bewijzen	10%
problemen oplossen	7,5%

Hoe kan je de leerstof studeren?

De Examencommissie maakt geen cursussen en stelt geen boeken ter beschikking. Je kan studiemateriaal kopen in een (online) boekhandel of ontlenen en raadplegen in een bibliotheek. De bibliotheken van de lerarenopleiding aan de universiteit of de hogeschool bieden heel wat leermiddelen aan.

We hebben voor jou een selectie gemaakt van interessante boeken, websites en ander materiaal. Uiteraard mag je ook andere bronnen gebruiken. Ga altijd na of je alle thema's uit de vakfiche verwerkt hebt. Soms staat er in een boek of cursus meer dan wat je moet kennen, in andere staat niet alle leerstof uit de vakfiche opgenomen.

Ga altijd na of je alle thema's uit de vakfiche verwerkt hebt. Soms staat er in een studiemateriaal meer dan wat je moet kennen, in andere studiematerialen staat niet alle leerstof uit de vakfiche opgenomen.

Ga altijd na of de studiematerialen de juiste begrippen & notaties gebruiken. Wij aanvaarden enkel de begrippen & notaties zoals vermeld in bijlage "Begrippen & notaties"! Ook in de studiematerialen die we adviseren kunnen er soms andere begrippen & notaties gebruikt worden, wees hier waakzaam voor.

Let op! Mogelijk is een boek of cursus niet langer verkrijgbaar of zijn de meest recente werken nog niet opgenomen. Ook websites veranderen soms van naam of worden aangepast. Als je niet op de juiste website terechtkomt, kan je die proberen te vinden via een goede zoekmachine.

Leerboeken en methodes

leerboek of methode	uitgeverij	gegevens
Van basis tot limiet 5 uur (doorstroom)	Diekeure	https://www.diekeure.be/
Delta 5 uur (doorstroom)	Plantyn	https://www.plantyn.com/

Websites

website	Wat vind je hier?
https://www.math4all.nl/	Nederlandse website waarop je over verschillende leerstofonderdelen theorie, voorbeelden en oefeningen (met oplossingen) vindt. Opgelet, er wordt gewerkt met de opbouw van het Nederlands onderwijssysteem. Ook de begrippen en notaties verschillen soms van de onze!

Bijlagen



Formularium 2^e graad

Definitie ruimte meetkunde

Onderlinge ligging van rechten en vlakken

Onderlinge ligging van 2 rechten

- D01** De rechte a snijdt de rechte b in het punt S als en slechts als de rechte a en de rechte b juist 1 gemeenschappelijk punt hebben, namelijk het punt S .
- D02** De rechte a valt samen met de rechte b als en slechts als elk punt van de rechte a tot de rechte b behoort en omgekeerd.
- D03** De rechte a is evenwijdig met de rechte b als en slechts als
- a en b in hetzelfde vlak liggen en geen enkel punt gemeenschappelijk hebben.
 - OF a en b samenvallen.
- D04** De rechte a kruist de rechte b als en slechts als a en b niet in hetzelfde vlak liggen. In dat geval hebben de rechten a en b geen enkel punt gemeenschappelijk.

Onderlinge ligging van een rechte en een vlak

- D05** De rechte a snijdt het vlak α als en slechts als de rechte a en het vlak α juist 1 punt gemeenschappelijk hebben.
- D06** De rechte a ligt in het vlak α als en slechts als de rechte a en het vlak α alle punten van de rechte a gemeenschappelijk hebben.
- D07** De rechte a is evenwijdig met het vlak α als en slechts als
- de rechte a en het vlak α geen enkel punt gemeenschappelijk hebben.
 - OF de rechte a in het vlak α ligt.

Onderlinge ligging van 2 vlakken

- D08** Het vlak α snijdt het vlak β in de rechte s als en slechts als de vlakken α en β enkel de punten van de rechte s gemeenschappelijk hebben.
- D09** Het vlak α valt samen met het vlak β als en slechts als elk punt van het vlak α tot het vlak β behoort en omgekeerd.
- D10** Het vlak α is evenwijdig met het vlak β als en slechts als
- de vlakken α en β geen enkel punt gemeenschappelijk hebben.

Formularium (dit krijg je tijdens het examen)

- OF de vlakken α en β samenvallen.

Loodrechte stand van rechten en vlakken

- D11** De hoek tussen 2 kruisende rechten is gelijk aan de hoek bepaald door de rechten evenwijdig aan die kruisende rechten door een gekozen punt.
- D12** Is de hoek tussen 2 rechten gelijk aan 90° , dan zeggen we dat die 2 rechten loodrecht op elkaar staan.
- D13** Een rechte a staat loodrecht op een vlak α als en slechts als de rechte a loodrecht staat op elke rechte van het vlak α .
- D14** Snijden 2 vlakken α en β elkaar in een snijlijn s ,
nemen we een rechte in α loodrecht op s en
een rechte in β loodrecht op s ,
dan is de hoek tussen α en β gelijk aan de hoek tussen de 2 loodlijnen.
- D15** 2 vlakken α en β staan loodrecht op elkaar als en slechts als de hoek tussen deze 2 vlakken gelijk is aan 90° .

Eigenschappen ruimtemeetkunde

Eigenschappen omtrent de ligging van rechten en vlakken in de ruimte

- E01** Een vlak is volledig bepaald door:
- drie niet-collineaire punten;
 - een rechte en een punt buiten de rechte;
 - 2 evenwijdige, maar niet samenvallende rechten;
 - 2 snijdende rechten.
- E02** Heeft een rechte 2 verschillende punten gemeenschappelijk met een vlak, dan ligt die rechte in dat vlak.
In symbolen: $A, M \in \alpha \Rightarrow AM \subset \alpha$
- E03** Hebben 2 verschillende vlakken een punt gemeenschappelijk, dan is hun doorsnede een rechte door dit punt.
In symbolen: $P \in \alpha \cap \beta$ en $\alpha \neq \beta \Rightarrow \exists r : P \in r$ en $\alpha \cap \beta = r$
- E04** Snijdt een rechte een vlak, dan snijdt elk vlak door die rechte het gegeven vlak volgens een rechte door het snijpunt van de gegeven rechte met het vlak.
In symbolen: $a \subset \beta$ en $a \cap \alpha = \{P\} \Rightarrow \alpha \cap \beta = b$ en $P \in b$
- E05** Zijn 2 rechten evenwijdig zijn met eenzelfde derde rechte, dan zijn ze ook onderling evenwijdig.

Formularium (dit krijg je tijdens het examen)

In symbolen: $a // c$ en $b // c \Rightarrow a // b$

E06 Is een rechte evenwijdig met een rechte van een vlak, dan is ze evenwijdig met dat vlak.

In symbolen: $b \subset \alpha$ en $a // b \Rightarrow a // \alpha$

E07 Omvat een vlak 2 snijdende rechten die evenwijdig zijn met een ander vlak, dan zijn die vlakken evenwijdig.

In symbolen:
$$\left. \begin{array}{l} a \cap b = \{P\} \\ a \subset \alpha, a // \beta \\ b \subset \alpha, b // \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha // \beta$$

E08 Snijdt een rechte 1 van 2 evenwijdige vlakken, dan snijdt ze ook het andere vlak.

In symbolen: $a \cap \alpha = \{P\}$ en $\alpha // \beta \Rightarrow a \cap \beta = \{Q\}$

E09 Snijdt een vlak een van 2 evenwijdige vlakken, dan snijdt het ook het andere vlak en de snijlijnen zijn evenwijdig

In symbolen: $\alpha \cap \gamma = s$ en $\alpha // \beta \Rightarrow \gamma \cap \beta = r$ en $r // s$

E10 Snijdt een van 2 evenwijdige rechten een vlak, dan snijdt ook de andere rechte dat vlak.

In symbolen: $a \cap \alpha = \{P\}$ en $r // a \Rightarrow r \cap \alpha = \{Q\}$

E11 Is een rechte a evenwijdig met een vlak en trek je door een punt van het vlak een rechte evenwijdig met de gegeven rechte, dan ligt deze rechte in dat vlak.

E12 Door een gegeven punt gaat juist 1 loodlijn op een gegeven vlak. Door een gegeven punt gaat juist 1 loodvlak op een gegeven rechte.

E13 Staat een rechte loodrecht op 2 snijdende rechten van een vlak, dan staat ze loodrecht op dat vlak.

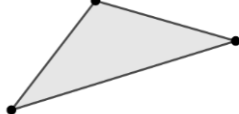
E14 2 vlakken staan loodrecht op elkaar als en slechts als het ene vlak een loodlijn op het andere vlak omvat.

Correlatiecoëfficiënt

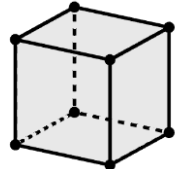
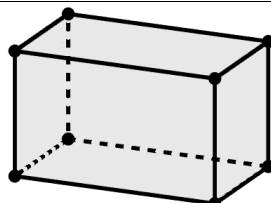
Voor de correlatiecoëfficiënt r geldt:

- Als $r \leq -0,7$ dan is er sprake van sterke negatieve samenhang.
- Als $-0,7 < r \leq -0,3$ dan is er sprake van matige negatieve samenhang.
- Als $-0,3 < r < 0$ dan is er sprake van zwakke negatieve samenhang.
- Als $r = 0$ dan is er geen samenhang.
- Als $0 < r < 0,3$ dan is er sprake van zwakke positieve samenhang.
- Als $0,3 \leq r < 0,7$ dan is er sprake van matige positieve samenhang.
- Als $r \geq 0,7$ dan is er sprake van sterke positieve samenhang.

Omtrek en oppervlakte van vlakke meetkundige figuren

figuur	omtrek	oppervlakte
	$2 \cdot l + 2 \cdot b$	$l \cdot b$
	$4z$	z^2
	$z_1 + z_2 + z_3$	$\frac{b \cdot h}{2}$
	$2\pi r$	πr^2

Inhoud van ruimtefiguren

figuur	formule inhoud / volume
	z^3
	$l \cdot b \cdot h$



Lijst met bewijzen

Studietip: probeer het gegeven bewijs ook eens met andere letters uit te schrijven. Vraag je ook af of het bewijs geldig is in een gewijzigde situatie.

De irrationaliteit van $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ is een irrationaal getal.

Bewijs: we bewijzen dit uit het ongerijmde.

Veronderstel dat $\sqrt{2}$ een rationaal getal is. Dan kan je $\sqrt{2}$ schrijven als een onvereenvoudigbare breuk $\frac{a}{b}$ met $a \in \mathbb{Z}$ en $b \in \mathbb{N}_0$.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow a^2 \text{ is deelbaar door } 2 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} a \text{ is deelbaar door } 2. \quad (**) a^2 = a \cdot a \text{ is deelbaar door } 2 \text{ en } 2 \text{ is priemgetal}$$

Hieruit volgt dat er een $z \in \mathbb{Z}$ bestaat zodanig dat $a = 2z$.

Uit (1) volgt dan:

$$(2z)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4z^2 = 2b^2 \Rightarrow 2z^2 = b^2$$

$$\Rightarrow b^2 \text{ is deelbaar door } 2 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} b \text{ is deelbaar door } 2. \quad (**) b^2 = b \cdot b \text{ is deelbaar door } 2 \text{ en } 2 \text{ is priemgetal}$$

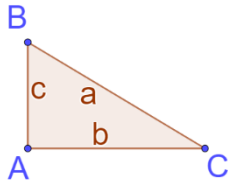
Dus a en b zijn beiden deelbaar door 2 $\Rightarrow \frac{a}{b}$ is een vereenvoudigbare breuk.

Dat is in tegenstrijd met de veronderstelling.

Bijgevolg is $\sqrt{2}$ een irrationaal getal.

De stelling van Pythagoras

In een rechthoekige driehoek is de som van de kwadraten van de rechthoekszijden gelijk aan het kwadraat van de schuine zijde.

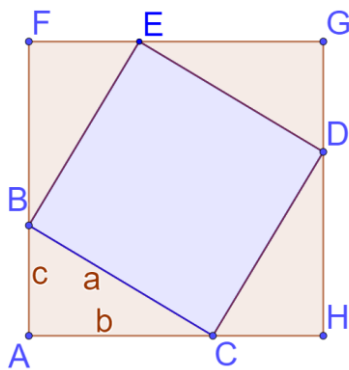


Gegeven: $\triangle ABC$ met $\hat{A} = 90^\circ$

Te bewijzen: $|AC|^2 + |AB|^2 = |BC|^2$ of $b^2 + c^2 = a^2$

Bewijs:

Teken een vierkant BCDE met zijde $|BC| = a$ op de schuine zijde van $\triangle ABC$ en vervolledig de figuur met de driehoeken $\triangle FEB$, $\triangle GDE$ en $\triangle HCD$ die congruent zijn met $\triangle ABC$:



Uit $|AH| = |HG| = |GF| = |FB| = b + c$ en $\hat{A} = \hat{H} = \hat{G} = \hat{F} = 90^\circ \Rightarrow AFGH$ is een vierkant.

We kunnen de oppervlakte van AFGH op 2 manieren berekenen:

(1) $\text{Opp AFGH} = (b + c)^2$

(2) $\text{Opp AFGH} = \text{Opp BCDE} + 4 \cdot \text{Opp } \triangle ABC$

$$= a^2 + 4 \cdot \frac{b \cdot c}{2}$$

$$= a^2 + 2bc$$

Uit (1) en (2) volgt:

$$(b + c)^2 = a^2 + 2bc$$

$$\Leftrightarrow b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

Lijst met bewijzen (dit krijg je niet tijdens het examen)

De analytische uitdrukking voor de afstand tussen 2 punten in het vlak (afstandsformule) als toepassing op Pythagoras

Voor 2 punten $P(x_1, y_1)$ en $Q(x_2, y_2)$ geldt dat $|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

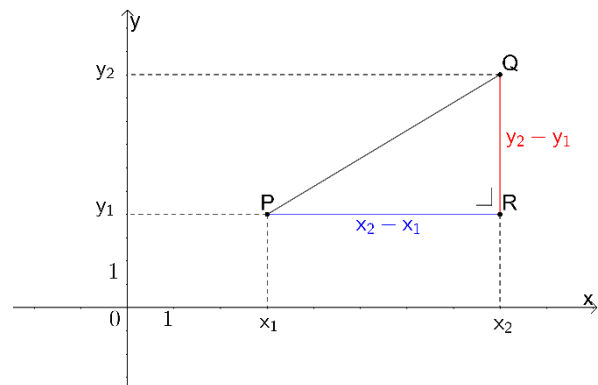
Gegeven: $P(x_1, y_1)$ en $Q(x_2, y_2)$

Te bewijzen: $|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Bewijs:

Stel $x_1 < x_2$ en $y_1 < y_2$

Teken $\triangle PQR$ met $\hat{R} = 90^\circ$, $[PQ]$ als schuine zijde, $[PR] \parallel x$ en $[QR] \parallel y$.



In de rechthoekige $\triangle PQR$ geldt:

$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= |PR|^2 + |QR|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ \Rightarrow |PQ| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

stelling van Pythagoras

Opmerking: Voor elke andere ligging van de gegeven punten P en Q kunnen we op een analoge manier bewijzen dat de afstand $|PQ|$ met dezelfde formule kan berekend worden.

De sinusregel

In een willekeurige driehoek ABC geldt: $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$

We bewijzen 1 gelijkheid. Het bewijs van de andere verloopt analoog.

Gegeven: een willekeurige driehoek ABC

Te bewijzen: $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$

Bewijs:

Geval 1: $\hat{A}$ is een scherpe hoek

Teken een hoogtelijn [BD] uit B op AC.

In de rechthoekige driehoek BDC geldt:

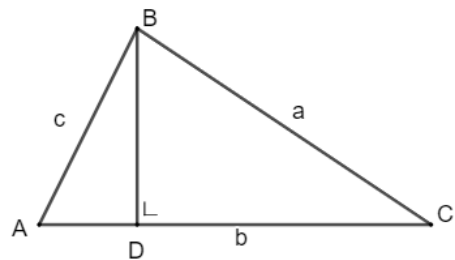
$$\sin \hat{C} = \frac{|BD|}{a} \Rightarrow |BD| = a \cdot \sin \hat{C} \quad (1)$$

In de rechthoekige driehoek ADB geldt:

$$\sin \hat{A} = \frac{|BD|}{c} \Rightarrow |BD| = c \cdot \sin \hat{A} \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt

$$a \cdot \sin \hat{C} = c \cdot \sin \hat{A} \Rightarrow \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$



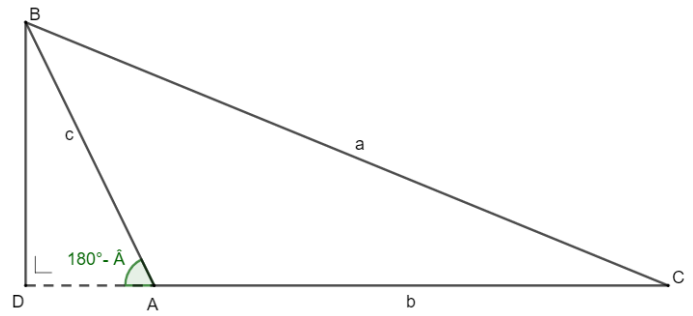
Lijst met bewijzen (dit krijg je niet tijdens het examen)

Geval 2: Een driehoek met $\hat{A}$ is een stompe hoek.

Teken een hoogtelijn $[BD]$ uit B op AC.

In de rechthoekige driehoek BDC geldt:

$$\sin \hat{C} = \frac{|BD|}{a} \Rightarrow |BD| = a \cdot \sin \hat{C} \quad (1)$$



In de rechthoekige driehoek ADB geldt:

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \hat{A}) &= \frac{|BD|}{c} \Rightarrow |BD| = c \cdot \sin(180^\circ - \hat{A}) \\ &\Rightarrow |BD| = c \cdot \sin \hat{A} \quad (\text{supplementaire hoeken}) \end{aligned} \quad (2)$$

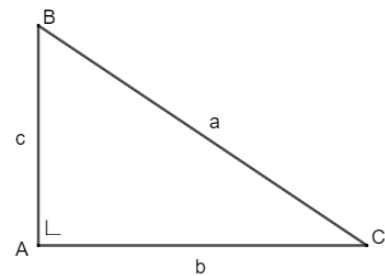
Uit (1) en (2) volgt

$$a \cdot \sin \hat{C} = c \cdot \sin \hat{A} \Rightarrow \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

Geval 3: $\hat{A}$ is een rechte hoek

In de rechthoekige driehoek BAC geldt:

$$\sin \hat{C} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{\sin \hat{C}} \quad (1)$$



Gezien $\sin \hat{A} = \sin 90^\circ = 1$ kunnen we (1) ook schrijven als

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

De cosinusregel

In een willekeurige driehoek ABC geldt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

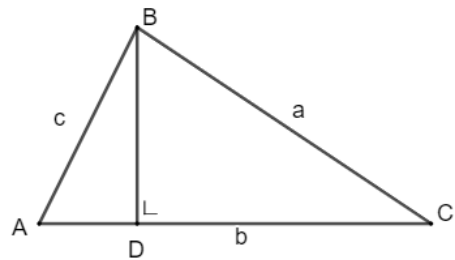
We bewijzen de eerste gelijkheid. Het bewijs van de andere verloopt analoog.

Gegeven: een willekeurige driehoek ABC

Te bewijzen: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$

Bewijs:

Geval 1: $\hat{A}$ is een scherpe hoek



Teken een hoogtelijn [BD] uit B op AC.

In de rechthoekige driehoek BDC geldt:

$$\begin{aligned} a^2 &= |BD|^2 + |DC|^2 \\ &= |BD|^2 + (b - |AD|)^2 \\ &= |BD|^2 + b^2 - 2b|AD| + |AD|^2 \\ \Leftrightarrow &\quad \text{in de rechthoekige } \triangle ADB \text{ geldt: } c^2 = |AD|^2 + |BD|^2 \\ &\Rightarrow |BD|^2 = c^2 - |AD|^2 \end{aligned}$$

$$= c^2 - |AD|^2 + b^2 - 2b|AD| + |AD|^2$$

$$= c^2 + b^2 - 2b|AD|$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow &\quad \text{in de rechthoekige } \triangle ADB \text{ geldt: } \cos \hat{A} = \frac{|AD|}{c} \\ &\Rightarrow |AD| = c \cos \hat{A} \end{aligned}$$

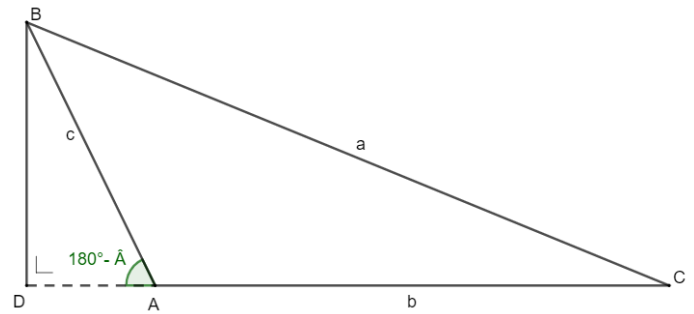
$$= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

Lijst met bewijzen (dit krijg je niet tijdens het examen)

Geval 2: $\hat{A}$ is een stompe hoek

Teken een hoogtelijn $[BD]$ uit B op AC.

In de rechthoekige driehoek BDC geldt:



$$a^2 = |BD|^2 + |DC|^2$$

$$= |BD|^2 + (b + |AD|)^2$$

$$= |BD|^2 + b^2 + 2b|AD| + |AD|^2$$

$$\Updownarrow \quad \text{in de rechthoekige } \triangle ADB \text{ geldt: } c^2 = |AD|^2 + |BD|^2$$

$$\Rightarrow |BD|^2 = c^2 - |AD|^2$$

$$= c^2 - |AD|^2 + b^2 + 2b|AD| + |AD|^2$$

$$= b^2 + c^2 + 2b|AD|$$

$$\Updownarrow \quad \text{in de rechthoekige } \triangle ADB \text{ geldt: } \cos(180^\circ - \hat{A}) = \frac{|AD|}{c}$$

$$\Rightarrow |AD| = c \cos(180^\circ - \hat{A})$$

$$\Rightarrow |AD| = -c \cos \hat{A} \quad (\text{supplementaire hoeken})$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

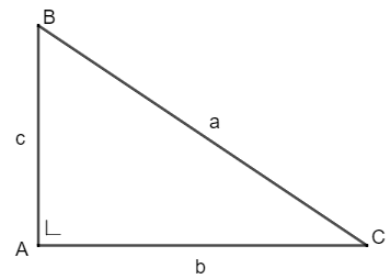
Geval 3: $\hat{A}$ is een rechte hoek

In dit geval geldt de stelling van Pythagoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

gezien $\cos \hat{A} = \cos 90^\circ = 0$ geldt dan ook:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

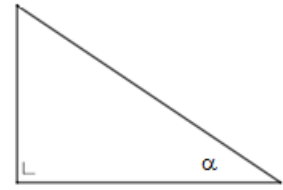


Grondformule en afgeleide formules voor hoeken in een rechthoekige driehoek

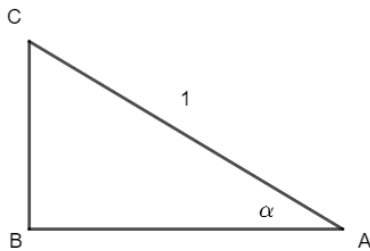
In een rechthoekig driehoek met scherpe hoek α geldt:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \quad \text{met } \cos \alpha \neq 0$$



Construeer een rechthoekige driehoek ABC waarvan de schuine zijde lengte 1 heeft en waarvan 1 van de scherpe hoeken gelijk is aan α .



Dan volgt uit de definitie van sinus en cosinus in een rechthoekige driehoek en de stelling van Pythagoras dat

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{|BC|}{1} = |BC| \\ \cos \alpha = \frac{|AB|}{1} = |AB| \\ |AB|^2 + |BC|^2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Formule voor $\tan^2 \alpha$:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 &\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \quad (\text{definitie tangens}) \end{aligned}$$

Tweedegraadsfuncties

Coördinaten van de top

De coördinaten van de top T van een parabool met vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ zijn

$$x_T = \frac{-b}{2a} \text{ en } y_T = c - \frac{b^2}{4a}.$$

$$\text{Gegeven: } y = ax^2 + bx + c$$

$$\text{Te bewijzen: } x_T = \frac{-b}{2a} \text{ en } y_T = c - \frac{b^2}{4a}$$

Bewijs:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$= a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$\text{stel } p = -\frac{b}{2a} \text{ en } q = c - \frac{b^2}{4a}$$

$$= a(x - p)^2 + q$$

$$\Rightarrow x_T = \frac{-b}{2a} \text{ en } y_T = c - \frac{b^2}{4a}$$

Oplossingen van een tweedegraadsvergelijking

De formules voor de oplossingen van een tweedegraadsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ zijn:

$$\square x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ en } x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ als } D = b^2 - 4ac > 0$$

$$\square x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} \text{ als } D = b^2 - 4ac = 0$$

$$\square \text{ Geen oplossingen als } D = b^2 - 4ac < 0$$

Bewijs:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$\Updownarrow$

beide leden door a ($a \in \mathbb{R}_0$)

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Downarrow \text{ stel } b^2 - 4ac = D$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}$$

Geval 1: $D = b^2 - 4ac > 0$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{D}{4a^2}} \quad \text{of} \quad x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{D}{4a^2}}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} \quad \text{of} \quad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{of} \quad x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Lijst met bewijzen(dit krijg je niet tijdens het examen)

Geval 2: $D = b^2 - 4ac = 0$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a}$$

Geval 3: $D = b^2 - 4ac < 0$

geen oplossingen want linkerlid is positief en rechterlid strikt negatief

Ontbinden in factoren

We bewijzen eerst volgende eigenschap:

De som s en het product p van de oplossingen van een tweedegraadsvergelijking

$ax^2 + bx + c = 0$ met $D \geq 0$ zijn:

$$s = \frac{-b}{a} \text{ en } p = \frac{c}{a}$$

Gegeven: de oplossingen van de tweedegraadsvergelijking zijn x_1 en x_2

$$\text{Te bewijzen: } s = \frac{-b}{a} \text{ en } p = \frac{c}{a}$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} s &= x_1 + x_2 \\ &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \\ &= \frac{-b + \sqrt{D} - b - \sqrt{D}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= x_1 \cdot x_2 \\ &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \\ &= \frac{(-b + \sqrt{D}) \cdot (-b - \sqrt{D})}{2a \cdot 2a} \\ &= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{D})^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - D}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Eigenschap i.v.m. ontbinden in factoren:

Lijst met bewijzen(dit krijg je niet tijdens het examen)

De formules voor het ontbinden in factoren van een veelterm van de tweede graad

$f(x) = ax^2 + bx + c$ zijn:

$\square f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ als $D > 0$

$\square f(x) = a \cdot (x - x_1)^2$ als $D = 0$

$\square$ niet te ontbinden als $D < 0$

Gegeven: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Te bewijzen:

$\square f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ als $D > 0$

$\square f(x) = a \cdot (x - x_1)^2$ als $D = 0$

$\square$ niet te ontbinden als $D < 0$

Bewijs:

Geval 1: $D > 0$; nulwaarden zijn x_1 en x_2

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \\ &= a \cdot (x^2 - x \cdot x_2 - x_1 \cdot x + x_1 \cdot x_2) \\ &= a \cdot (x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2) \\ &= a \cdot \left(x^2 - \left(\frac{-b}{a} \right) \cdot x + \frac{c}{a} \right) && \text{(eigenschap s en p)} \\ &= a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} \right) \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

Lijst met bewijzen(dit krijg je niet tijdens het examen)

Geval 2: $D=0$; nulwaarde $x_1 = x_2$

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x - x_1)^2 \\ &= a \cdot (x^2 - 2 \cdot x \cdot x_1 + x_1^2) \\ &= a \cdot (x^2 - (x_1 + x_1) \cdot x + x_1 \cdot x_1) \\ &= a \cdot \left(x^2 - \left(\frac{-b}{a} \right) \cdot x + \frac{c}{a} \right) && \text{(eigenschap s en p)} \\ &= a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} \right) \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

Geval 3: $D < 0$; geen nulwaarden

Bewijs uit het ongerijmde:

Als $f(x) = ax^2 + bx + c$ te ontbinden is in $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

dan vinden we nulwaarden x_1 en x_2 .

Dit is in strijd met het gegeven, nl. geen nulwaarden.

